Abrikosov-Gleichung für Typ-2-Supraleiter bei $T=0\ ^\circ\mathrm{K}$

Von Wolfgang Klose

Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG, Erlangen

(Z. Naturforschg. **19 a**, 265—266 [1964]; eingegangen am 14. Januar 1964)

Die Ginzburg–Landau-Theorie der Supraleiter [1] beruht auf der Landauschen Theorie der Phasenübergänge 2. Ordnung und ist daher nur am Übergangspunkt, d. h. nahe der Sprungtemperatur T_c, gültig.

Die Gibbssche freie Energiedichte des Supraleiters wird als Taylor-Reihe nach dem Ordnungsparameter $|\Psi|^2$ angesetzt:

$$g_{\mathrm{GL}} = -\frac{H_c^2}{4\pi}\left[\frac{|\Psi|^2}{|\Psi_e|^2} - \frac{1}{2}\frac{|\Psi|^4}{|\Psi_e|^4}\right]. \tag{1}$$

Hier bedeuten: H_c das thermodynamische kritische Feld des Supraleiters und Ψ_e den Gleichgewichtswert von Ψ für den ungestörten Supraleiter.

Für $\quad \Psi=\Psi_e$ ist $g_{\mathrm{GL}}=\mathrm{Min}(g_{\mathrm{GL}}) = -\dfrac{H_c^2}{8\pi}$.

Die Beschränkung der Ginzburg–Landau-Theorie auf $T\approx T_c$ konnte durch Bardeen [2] durch Wahl eines allgemeinen Gibbsschen Potentials beseitigt werden:

$$g_{\mathrm{B}} = \frac{H_0^2}{4\pi}\left\{t^2\left[1-\sqrt{1-n_0^{-1}|\Psi|^2}\right] - \frac{1}{2n_0}|\Psi|^2\right\}. \tag{2}$$

Es bedeuten:

$H_0=H_c\ (T=0)$; $t=T/T_c$; $n_0=|\Psi_e(T=0)|^2$ die Anzahl der Supraleitungselektronen. Man kann leicht zeigen, daß für $T\to T_c$ der Bardeensche Ausdruck (2) äquivalent ist zu dem von Ginzburg und Landau (1). Für $T\to 0\ ^\circ\mathrm{K}$ nimmt der Bardeensche Ausdruck die Form

$$g_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{8\pi}\cdot\frac{H_0^2}{n_0}|\Psi|^2 \approx -\frac{1}{8\pi}H_c^2\frac{|\Psi|^2}{|\Psi_e|^2} \tag{3}$$

an.

Die in der Ginzburg–Landau- und Bardeen-Theorie aus der Variation der Gibbsschen Energie des Supraleiters im Magnetfeld $\mathfrak{H}=\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$ folgenden Lagrange-Gleichungen lauten:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2\Psi + \frac{\partial g}{\partial\Psi^*} = 0, \tag{4 a}$$

$$-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = i\frac{e\hbar}{mc}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + \frac{4\pi e^2}{mc^2}|\Psi|^2\mathfrak{A},$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)\Psi = 0 \quad \text{auf Oberflächen.} \tag{4 b}$$

In (4 a, b) kann für g einer der Ausdrücke (1), (2), (3) eingesetzt werden, unter m wird die Masse der Supraleitungselektronen verstanden.

Im folgenden sollen die Grenzfälle $T\approx T_c$ [beschrieben durch Gl. (1) in der GL- und Bardeen-Theorie] und $T\approx 0\ ^\circ\mathrm{K}$ [beschrieben durch Gl. (3) in der Bardeen-Theorie] betrachtet werden. Die Gln. (4 a, b) werden dazu auf reduzierte Variable umtransformiert:

$$\boldsymbol{r} = (m/4\pi)^{1/2}\cdot(c/e\,|\Psi_e|)\cdot\boldsymbol{r}',$$

$$\Psi = |\Psi_e|\,\Psi',$$

$$\mathfrak{A} = H_c(m/4\pi)^{1/2}\,(c/e\,|\Psi_e|)\cdot\mathfrak{A}'\cdot\begin{cases}\sqrt{2} & \text{für } T\approx T_c,\\ 1 & \text{für } T\approx 0\ ^\circ\mathrm{K}.\end{cases}$$

Mit $\quad \varkappa = \sqrt{2}\,c\,m\,H_c/4\pi\hbar\,e\,|\Psi_e|^2 \quad (5)$

wird dann:

$$\left(\frac{i}{\varkappa}\nabla' + \mathfrak{A}'\right)^2\Psi' = \Psi' - \Psi'|\Psi'|^2 \quad \text{für } T\approx T_c, \tag{6 a}$$

$$\left(\frac{i\sqrt{2}}{\varkappa}\nabla' + \mathfrak{A}'\right)^2\Psi' = \Psi' \quad \text{für } T\approx 0\ ^\circ\mathrm{K}, \tag{6 b}$$

$$-\mathrm{rot}'\,\mathrm{rot}'\,\mathfrak{A}' = \frac{i}{2\varkappa}(\Psi'^*\nabla'\Psi' - \Psi'\nabla'\Psi'^*) + |\Psi'|^2\mathfrak{A}, \tag{7 a}$$

$$-\mathrm{rot}'\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}' = \frac{i\sqrt{2}}{2\varkappa}(\Psi'^*\nabla'\Psi' - \Psi'\nabla'\Psi'^*) + |\Psi'|^2\mathfrak{A}. \tag{7 b}$$

Die Gln. (6 a), (7 a) liegen der Ginzburg–Landau-Theorie zugrunde. Es wurde gezeigt, daß für $\varkappa < 1/\sqrt{2}$ die Grenzflächenenergie zwischen Normal- und Supraphase positiv ist, die GL-Gleichung also Typ-1-Supraleiter beschreiben. Negative Phasengrenzflächenenergie ergibt sich für $\varkappa > 1/\sqrt{2}$; eine Lösung der Ginzburg–Landau-Gln. (6 a), (7 a) wurde von Abrikosov [3] angegeben und zur Grundlage der Diskussionen der physikalischen Eigenschaften der Typ-2-Supraleiter viel herangezogen [4].

Die Gln. (6 b), (7 b) liegen der Bardeenschen Theorie der Supraleiter zugrunde. Negative Phasengrenzflächenenergie zwischen Normal- und Supraphase tritt auf, wenn $\varkappa > 1/\sqrt{2}\cdot 1{,}36$. Der um den Faktor 1,36 gegenüber dem Ginzburg–Landau-Parameter verschiedene kritische $\varkappa$-Wert für das Auftreten negativer Phasengrenzflächenenergie kann nicht durch die in (5) enthaltene Temperaturabhängigkeit $(1+t^2)^{-1}$ erklärt werden, die den Faktor 2 erwarten läßt.

Von Gorkov [5] gibt es eine allgemeine Ableitung der phänomenologischen Theorie im ganzen Temperaturbereich. Er gibt als entsprechenden Faktor 1,25 an.

Eine Lösung der Bardeenschen Theorie für Typ-2-Supraleiter liegt noch nicht vor. Es läßt sich jedoch relativ einfach zeigen, daß der von Abrikosov gefundene Lösungstyp auch die Bardeenschen Gleichungen befriedigt.

[1] V. L. Ginzburg u. L. D. Landau, Zh. Eksperim. Teor. Fiz. **20**, 1064 [1950].

[2] J. Bardeen, Handbuch der Physik, Bd. 15, Springer-Verlag, Berlin 1956, S. 324 ff.

[3] A. A. Abrikosov, Soviet Phys. — J.E.T.P. **5** (32), 1174 [1957].

[4] T. G. Berlincourt u. R. R. Hake, Phys. Rev. **131**, 140 [1963].

[5] P. Gorkov, Zh. Eksperim. Teor. Fiz. **37**, 833 [1959].

Die Gln. (6), (7) können formal zusammengefaßt werden zu:

$$\left(\frac{i}{\mu}\nabla + \mathfrak{A}\right)^2 \Psi = \Psi - \varepsilon\,\Psi\,|\Psi|^2\,, \tag{8 a}$$

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \frac{i}{2\mu}\left(\Psi'^*\,\nabla\,\Psi - \Psi\,\nabla\,\Psi^*\right) + |\Psi|^2\,\mathfrak{A}\,, \tag{8 b}$$

$\mu = \varkappa$ und $\varepsilon = 1$, wenn $T \approx T_c$;

$\mu = \varkappa\sqrt{2}$ und $\varepsilon = 0$, wenn $T \approx 0\ °\mathrm{K}$.

(Die Striche an den Variablen werden fortgelassen.)

Auf die Gln. (8) wird sodann das ABRIKOSOVsche Lösungsverfahren angewandt, das darin besteht, im Fall $|\Psi|^2 \ll 1$, d. h. nahe dem durch ein starkes Magnetfeld bewirkten Übergang in den Normalzustand, eine Iterationslösung zu finden.

In nullter und erster Näherung braucht in (8 a) das in Ψ nichtlineare Glied nicht berücksichtigt zu werden, so daß hier kein Unterschied zu ABRIKOSOV auftritt und als Lösung von (8) in erster Näherung erscheint:

$$\Psi_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{i k n y}\, \Psi_n(x)\,;$$

$$\Psi_n(x) = \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2}\left(x - \frac{k n}{\mu^2}\right)^2\right\}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{A}_1 = A_1 \mathbf{e}_y\,, \quad A_1 = H_0\,x - \int_{-\infty}^{x} |\Psi_1|^2\,\mathrm{d}x'\,.$$

C_n und k sind willkürliche Parameter, H_0 das in Z-Richtung anliegende äußere homogene Magnetfeld.

Die Lösung (9) genügt nicht mehr der Eichbedingung $\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$, kann jedoch durch die allgemeine Eichtransformation $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} + \nabla\chi$, $\Psi \to \Psi \exp\{i\,e\,\chi/\hbar\,c\}$, die die LAGRANGE-Gleichungen (4 a, b) invariant läßt, dahingehend umgeformt werden.

Für die zweite Näherung in Ψ wird A_1 aus (9) in (8) eingesetzt und der nichtlineare $\Psi_2\,|\Psi_2|^2$-Term durch $\Psi_1\,|\Psi_1|^2$ näherungsgemäß approximiert. Mit dem Ansatz

$$\Psi_2 = \Psi_1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i k n y}\,\varphi_n(x)$$

folgt für die $\varphi_n(x)$:

$$-\frac{1}{\mu^2}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_n}{\mathrm{d}x^2} + \varphi_n\left[\left(\mu\,x - \frac{k n}{\mu}\right)^2 - 1\right] = 2\,\mu\,x\,(\mu - H_0)\left(x - \frac{k n}{\mu^2}\right) C_n\,\psi_n(x)$$
$$+ \sum_{p,m} C_p\,C_m^*\,C_{n-p+m}\,\psi_{n-p+m}\left\{I_p^m(x)\left[\frac{H_0}{\mu}\,x - \frac{k}{\mu^2}\left(n - \frac{p-m}{2}\right)\right] - \varepsilon\,\psi_p(x)\,\psi_m(x)\right\}, \tag{10}$$

wobei $\quad I_p^m(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi_m(x')\,\psi_p(x')\,\mathrm{d}x'$.

Ebenso wie bei ABRIKOSOV kann hier die Lösbarkeitsbedingung für die inhomogene Diff.-Gl. (10) [Orthogonalität der Inhomogenität zur Lösung der homogenen Gleichung] benutzt werden. Diese Lösbarkeitsbedingung lautet [$\psi_m(x)$ ist Lösung der homogenen Gl. (10)]:

$$\frac{\mu - H_0}{\mu}\,\overline{|\Psi_1|^2} + \left[\frac{1}{2\,\mu} - \left(\varepsilon + \frac{\mu - H_0}{2\,\mu^3}\right)\right]\overline{|\Psi_1|^4} = 0\,. \tag{11}$$

Wir benutzen (11) zur Festlegung von Ψ_1.

Eine weitere Bedingung für Ψ wird durch die Minimaleigenschaft der GIBBSschen freien Energie gegeben. Aus

$$G = \int\left[\frac{1}{2\,m}\left|\frac{\hbar}{i}\,\nabla\,\Psi - \frac{e}{c}\,\mathfrak{A}\,\Psi\right|^2 + \frac{1}{8\,\pi}\,H^2 + g(\Psi)\right]\mathrm{d}\tau$$

wird nach Einführen der reduzierten Variablen, Verwendung von (7) und (8), sowie Weglassen eines Oberflächenintegrals:

$$G = \mathrm{const}\int\left[H^2 - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,|\Psi|^4\right]\mathrm{d}\tau\,. \tag{12}$$

Drückt man das Magnetfeld durch die Induktion aus, wird mit (11):

$$B = \overline{H} = H_0 - \frac{1}{2\,\mu}\,\overline{|\Psi_1|^2} = H_0 - \frac{\mu - H_0}{\left[2\,\mu^2\,\varepsilon - \left(1 - \frac{\mu - H_0}{\mu}\right)\right]\beta}\,, \tag{13}$$

$$\beta = \overline{|\Psi_1|^4} / \left(\overline{|\Psi_1|^2}\right)^2 \geqq 1\,. \tag{14}$$

(13) kann in (12) eingesetzt werden und führt zu:

$$G = \mathrm{const}\cdot\left[B^2 - \frac{(1 + (2\,\mu^2\,\varepsilon - 1)\,\beta)(\mu - B)^2}{\left[1 + (2\,\mu^2\,\varepsilon - 1)\,\beta + \frac{\mu - H_0}{\mu}\,\beta\right]^2}\right]. \tag{15}$$

Man überzeugt sich leicht, daß (15) minimal wird für den Minimalwert von β. Dieser wurde bereits von ABRIKOSOV ermittelt. Da die zwischen der GL-Theorie und der BARDEEN-Theorie unterscheidende Größe ε in Ψ_1 nicht eingeht, kann das ABRIKOSOV-Ergebnis benutzt werden. Im Spezialfall $C_n = C$ erhalten wir wie er:

$$\Psi_1 = C\,e^{-\mu^2 x^2/2}\,\vartheta_3\left[\sqrt{2\,\pi}\,\mu\,(x + i\,y)\right] \tag{16}$$

mit dem für $T \sim T_c$ und $T \sim 0\ °\mathrm{K}$ verschiedenen Faktor μ.

Damit ist gezeigt, daß die ABRIKOSOV-Lösung für Typ-2-Supraleiter auch in der BARDEENschen Theorie eine Lösung bei $T \sim T_c$ und $T \sim 0\ °\mathrm{K}$ darstellt. Für Betrachtungen bei beliebigen Temperaturen wird man daher (16) verwenden können, wenn $\mu = \mu(T)$ eingesetzt wird. Dabei kann die von CHANDRASEKHAR [6] et al. diskutierte T-Abhängigkeit benutzt werden.

[6] B. S. CHANDRASEKHAR, J. K. HULM u. C. K. JONES, Physics Letters 5, 18 [1963].